A számtani sorozat összegképlete

<u>Tétel:</u> A számtani sorozat első n elemének összege:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$$

<u>Bizonyítás:</u>

A számtani sorozat első n tagjának összegét (Sn) Gauss módszerével fogjuk belátni.

Írjuk fel az **első n tag összegét** tagonként, majd még egyszer, fordított sorrendben is:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Adjuk össze a kapott két egyenlet jobb és baloldalát. Így n darab kéttagú kifejezésből álló kifejezést kapunk a jobb oldalon:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) +$$
$$+(a_n + a_1).$$

Itt minden zárójelben szereplő közbülső tagot fel tudunk írni a_n és a_1 segítségével:

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$$
$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_n - 2d = a_1 + a_n$$

és így tovább.

Tehát az összegben n-szer szerepel az $(a_1 + a_n)$ tag, és a d nem szerepel. Így:

$2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$.

Ezt az egyenletet kettővel elosztva, az állításhoz jutunk:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

- Ezzel a bizonyítás kész.